(1)



Subject: المحاضرة الرابعة عشرة

Date 2018/5/14 الاثنين

الفصل الثالث:

المعادلات التفاضلية ذوات العوامل المتغيرة والتي ترد إلى معادلات تفاضلية خطية ذوات معاملات ثابتة.

1- معادلة أولر التفاضلية:

إن معادلة أولر هي كل معادلة من الشكل:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

لإيجاد الحل العام لها:

بإمكاننا رد هذه المعادلة التفاضلية إلى معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة من خلال ما يلي:

نفرض بداية أن $x = e^t$ فيكون $dx = e^t dt$ وبالتالي

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

ومنه يكون:

$$x y' = \frac{dy}{dt} = D_t y$$

$$x y' = D_t y$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x} = \left(-e^{-t}\frac{dy}{dt} + e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{1}{x}$$

$$= \left(-\frac{1}{x}D_t y + \frac{1}{x}D_t^2 y\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}D_t(D_t - 1)y$$

فيكون:

$$x^2 y'' = D_t(D_t - 1)y$$

$$x^2 y'' = D_t(D_t - 1)y$$

gh

وبشكل مشابه تماماً نجد أنَّ:

$$x^3 y''' = D_t (D_t - 1)(D_t - 2) y$$

- وبشكل عام نجد أنَّ:

$$x^n y^{(n)} = D_t (D_t - 1)(D_t - 2) \ldots (D_t - n + 1) y$$

الآن: بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على معادلة تفاضلية خطية من المرتبة n ذات معاملات ثابتة.

حيث نوجد الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة تماماً كما درسنا في الفصل الثاني.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية وذلك بعد تحويلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة

$$x^2 y'' + x y - y = 0$$

المعادلة التفاضلية المعطاة هي من الشكل:

معادلة أولر $\quad x^2 y^{(2)} + x y^{(1)} - y = 0$

لحلها نفرض أنَّ: $x = e^t \Rightarrow dx = e^t\, dt$

فيكون: $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

وجدنا أنَّ: $x y' = D_t y \quad \wedge \quad x^2 y'' = D_t (D_t - 1) y$

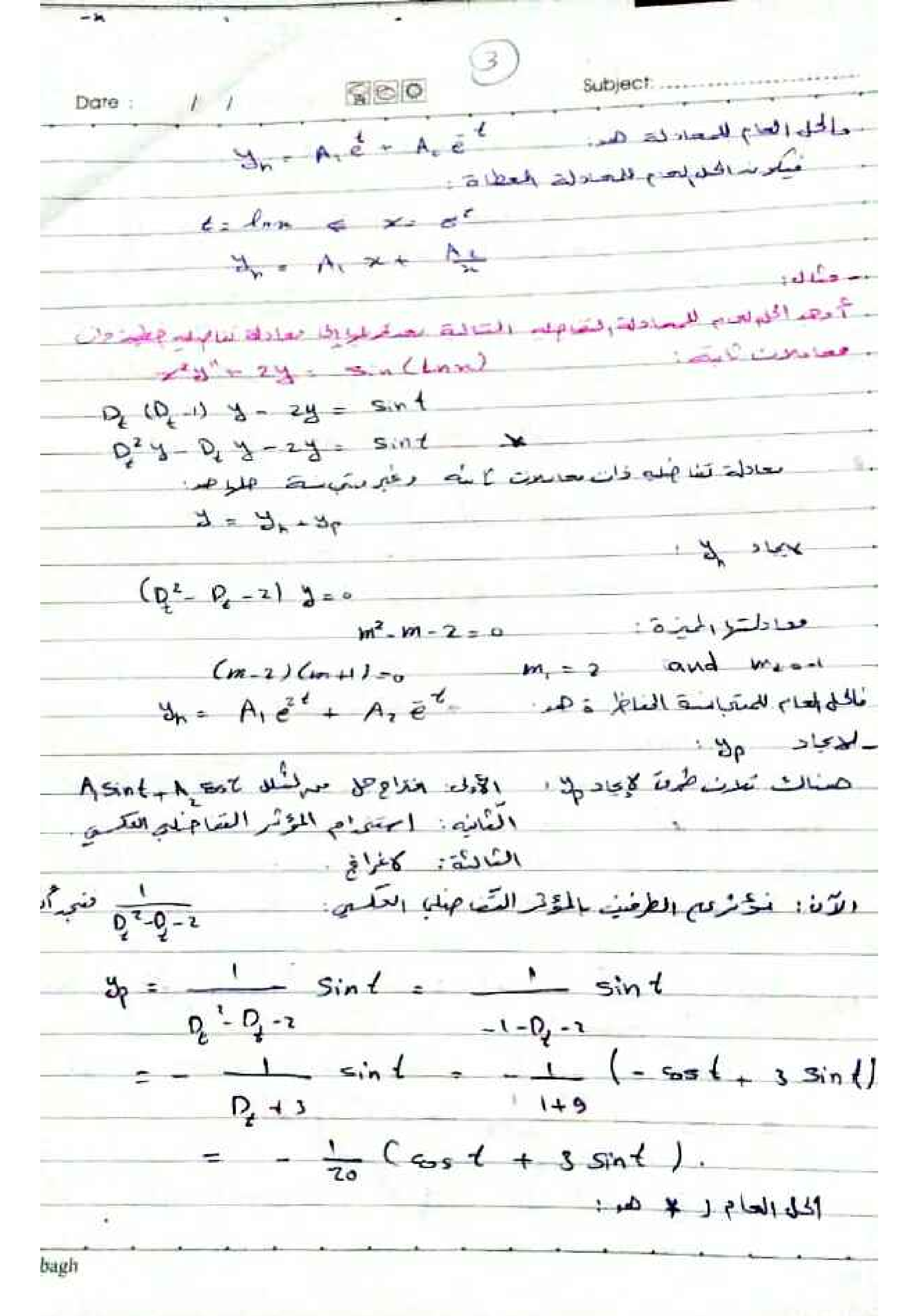
نعوض في المعادلة فيكون: $D_t (D_t - 1) y + D_t y - y = 0$

$$D_t^2 y - D_t y + D_t y - y = 0$$

$$D_t^2 y - y = 0 \Rightarrow (D_t^2 - 1) y = 0$$

المعادلة المميزة هي $m^2 - 1 = 0$ جذورها

$$m_1 = 1 \quad \text{and} \quad m_2 = -1$$



فالحل العام للمعادلة هو:

$$y_h = A_1 e^{t} + A_2 e^{-t}$$

فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$t = \ln x \Leftarrow x = e^{t}$$

$$y_h = A_1 x + \frac{A_2}{x}$$

- مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بعد تحويلها لمعادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة:

$$x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x)$$

$$D_t(D_t - 1)y - 2y = \sin t$$

$$D_t^2 y - D_t y - 2y = \sin t \quad *$$

معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة وغير متجانسة الحل هو:

$$y = y_h + y_p$$

ايجاد y_h:

$$(D_t^2 - D_t - 2)y = 0$$

معادلة المميزة: $m^2 - m - 2 = 0$

$(m-2)(m+1) = 0$ $\quad m_1 = 2$ and $m_2 = -1$

فالحل العام للمتجانسة المناظرة هو: $y_h = A_1 e^{2t} + A_2 e^{-t}$

- لإيجاد y_p:

هناك ثلاث طرق لإيجاد y_p: الأولى: نفترض حل من الشكل $A_1 \sin t + A_2 \cos t$

الثانية: استخدام المؤثر التفاضلي العكسي

الثالثة: لاغرانج

الآن: نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{D_t^2 - D_t - 2}$ فنجد

$$y_p = \frac{1}{D_t^2 - D_t - 2}\sin t = \frac{1}{-1 - D_t - 2}\sin t$$

$$= -\frac{1}{D_t + 3}\sin t = -\frac{1}{1+9}(-\cos t + 3\sin t)$$

$$= -\frac{1}{20}(\cos t + 3\sin t).$$

الحل العام لـ * هو:

Date : / / (4) Subject: ....

$A_1 e^{2t} + A_2 e^{-t} + \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{20}\sin t$

يكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$y = A_1 x^2 + \frac{A_2}{x} + \frac{1}{10}\cos \ln x - \frac{3}{20}\sin \ln x$

وكان بالامكان أن نجد y_p باستخدام لاغرانج وذلك كما يلي :

$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w}\, dt + y_2 \int \frac{w_2}{w}\, dt$

$w(e^{2t}, e^{-t}) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^{t} - 2e^{t} = -3e^{t}$

$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \sin t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^{-t}\sin t$

$\frac{w_1}{w} = \frac{-e^{-t}\sin t}{-3e^{t}}$

$\int \sin t$

$w_2 = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 2e^{2t} & \sin t \end{vmatrix} = e^{2t}\sin t$

$\frac{w_2}{w} = \frac{e^{2t}\sin t}{-3e^{t}}$

$y_p = e^{2t} \int \frac{-3e^{t}}{e^{2t}\sin t}\, dt + e^{-t} \int \frac{-3e^{t}}{e^{2t}\sin t}\, dt$ $\frac{1}{3} e^{t}\sin t$

بالعكس

$= -3e^{2t} \int e^{-t} \frac{dt}{\sin t} - 3e^{t} \int e^{-t}$

$y_p = e^{2t} \frac{1}{3} \int \sin t\, dt - \frac{1}{3} e^{-t} \int e^{t} \sin t\, dt \ldots$

Sabbagh

- ث لـ: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

أ معتمد حسوق المعادلة

$$x^3y''' - x^2y'' - 2y' - 2y = x^3 + 3x$$

وذلك بعد تحويلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة .

المعادلة المعطاة هي معادلة أولر لحلها نفرض أن $x = e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$xy' = D_t y$$

$$x^2y'' = D_t(D_t-1)y$$

$$x^3y''' = D_t(D_t-1)(D_t-2)y$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة .

$$D_t(D_t-1)(D_t-2)y - D_t(D_t-1)y + 2D_ty - 2y = e^{3t} + 3e^t$$

$$(D_t(D_t-1)(D_t-2) - D_t(D_t-1) + 2D_t - 2)y = e^{3t} + 3e^t$$

$$(D_t^3 - 3D_t^2 + 2D_t - D_t^2 + D_t + 2D_t - 2)y = e^{3t} + 3e^t$$

وبالتالي فإن :

$$[D_t^3 - 4D_t^2 + 5D_t - 2]y = e^{3t} + 3e^t$$

معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة الحل العام لها هو :

$$y = y_h + y_p$$

المعادلة المتجانسة المناظرة هي : $[D_t^3 - 4D_t^2 + 5D_t - 2]y = 0$

المعادلة المميزة هي : $m^3 - 4m^2 + 5m - 2 = 0$

$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = -\frac{D}{A} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 2$ $\qquad Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0.$

نلاحظ بأن $m = 1$ حل المعادلة التفاضلية : نقسم على $(m-1)$

$(m-1)(m-1)(m-2) = 0$ $\qquad (m-1)(m^2 - 3m + 2) = 0$

ومنه فإن $m_1 = m_2 = 1 \quad m_3 = 2$

$y_p = B e^{3t} + Q t^2 e^t$ $\qquad y_h = e^t(A + A_2 t) + A_3 e^{2t}$

- نلاحظ أن هناك اشتراك بين y_h و y_p نزيل ذلك الاشتراك وفق القاعدة الأساسية .

- طريقة المؤثر التفاضلي العكسي :

$$y_p = \frac{1}{D^3-4D^2+5D-2} e^{3t} + 3 \cdot \frac{1}{D^3-4D^2+5D-2} e^{t}$$

$$= \frac{1}{4} e^{3t} + 3 \cdot \frac{t^2 e^t}{f''}\Big|_{D=1}$$ جذر مكرر مرتين .

$$= \frac{e^{3t}}{4} - \frac{3}{2} t^2 e^t$$

⇐ الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$y = y_h + y_p$$

$$y = A_1 e^t + A_2 t e^t + A_3 e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t} - \frac{3}{2} x . \ln^2 x$$

** ** **

ـ معادلة لوجندر التفاضلية
الشكل العام لها هو

$$(px+q)^n y^{(n)} + a_1 (px+q)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = f(x)$$

حيث: p, q ثوابت حقيقية كذلك الثوابت $a_0 \dots a_n$.

في الحالة الخاصة عندما $p=1$ ، $q=0$ تتحول إلى معادلة أويلر

ـ للحصول على الحل العام لهذه المعادلة نفرض ما يأتي:

نضع $(px+q) = e^t \Longleftarrow p\,dx = e^t\,dt$ ومنه

$$\frac{dt}{dx} = \frac{p}{e^t} = \frac{p}{(px+q)}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{p}{px+q}\frac{dy}{dt} \Rightarrow (px+q)\, y' = p\, D_t\, y$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{p}{px+q}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dx}\left(p e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{e^t}\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(p e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{p}{e^t} = -p e^{-t}\frac{dy}{dt} + p e^{-t} \dots$$

$$= \frac{p^2}{e^{2t}}\left(-D_t + D_t^2\right) y$$

أي إنّ:

$$(px+q)^2 y'' = p^2 (D_t)(D_t - 1)\, y$$

وبنفس الأسلوب نجد أنّ:

$$(px+q)^3 y''' = p^3 D_t (D_t - 1)(D_t - 2).$$

وهكذا ـــ .

$$(px+q)^n y^{(n)} = p^n D_t (D_t - 1) \dots (D_t - n + 1)\, y$$

ـ نحول هذه المعادلة التفاضلية فنحصل على معادلة تفاضلية خطية من الرتبة n ذات معاملات ثابتة نوجد حلها كما تعلمنا سابقاً ثم نعود إلى المتغير الأصلي x فنحصل على الحل العام لها.

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(2x+1)^2 y'' + 2(2x+1)y' + y = 0$$

نفرض أنّ $2x+1=e^t$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2}{e^t} \Leftarrow 2dx = e^t dt$$

$$(2x+1)y' = D_t y$$

$$(2x+1)^2 y'' = 4D_t(D_t-1)y$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$4D_t(D_t-1)y + 4D_t y + y = 0$$

$$4D_t^2 - 4D_t y + 4D_t y + y = 0$$

$$(4D_t^2 - 1)y = 0$$

معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة المعادلة المميزة لها

$$4m^2 + 1 = 0$$

$$m^2 = \frac{-1}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4}i^2 \qquad m_1 = \frac{1}{2}i \quad \wedge m_2 = -\frac{1}{2}i$$

وبالتالي فإنّ الحل العام هو على الشكل:

$$y = A_1 e^{\frac{1}{2}t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

فالحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y_h = A_1 \cos\frac{1}{2}\ln(2x+1) + A_2 \sin\frac{1}{2}\ln(2x+1)$$

- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(x+1)^3 y'' + 3(x+1)^2 y' + (x+1)y = 6\ln(x+1)$$

- **الحل:** نقسم طرفي المعادلة التفاضلية على $x+1$ لنتحول إلى معادلة ليجاندر

$$(x+1)^2 y'' + 3(x+1) y' + y = \frac{6 \ln(x+1)}{x+1}$$

نفرض أن $x+1 = e^t \leftarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t}$

$(x+1)y' = D_t y$ and $(x+1)^2 y'' = D_t (D_t - 1) y$

نعوض :

$$D_t (D_t - 1) y + 3 D_t y + y = \frac{6 \ln e^t}{e^t}$$

أي أن :

$$(D_t^2 + 2D_t + 1) y = 6 t e^{-t}$$

$y = y_h + y_p$

المعادلة المميزة :

$m^2 + 2m + 1 = 0$

$(m+1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -1$

فالحل العام هو :

$$y_h = e^{-t}(A_1 + A_2 t) = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t}$$

الحل الخاص المقترح بطريقة المعاملات غير المعينة هو :

$$y_p = (B_1 t + B_2) e^{-t}$$

نلاحظ أنه هناك اشتراك بين y_h و y_p لإزالة الاشتراك نضرب بأقل قوة لـ t تزيل ذلك الاشتراك :

$$y_p = (B_1 t^3 + B_2 t^2) e^{-t}$$

لنوجد الحل الخاص بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي :

نؤثر على طرفي ... بالمؤثر التفاضلي العكسي $\frac{1}{D^2 + 2D + 1}$ فنجد أن :

$$y_p = \frac{1}{(D+1)^2} 6 t e^{-t}$$

$$y_p = 6 e^{-t} \frac{1}{(D+1-1)^2} t = 6 e^{-t} \frac{1}{D^2} t = 6 e^{-t} \frac{t^3}{6}$$

$$= t^3 e^{-t}$$

hawraa